Die ganzen, rationalen, reellen Zahlen

Referenz: [Halbeisen-Skript: Kapitel 4],
[Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, Kap. V, §4]

Jede Art von Zahlen ist ein Konstrukt, das bestimmten Zwecken dient:

- Natürliche Zahlen dienen zum Zählen endlich vieler Dinge.
- Negative Zahlen drücken das Fehlen einer Anzahl von Dingen aus.
- Rationale Zahlen stehen für Verhältnisse zwischen ganzen Zahlen.
- Positive reelle Zahlen messen Abstände.
- Reelle Zahlen repräsentieren Punkte auf einer Geraden und bilden die Grundlage der Analysis.
- Komplexe Zahlen bilden die Grundlage der höheren Mathematik und Physik.

Jede Art von Zahlen muss erst konstruiert werden, bevor man sie gebrauchen kann.

Konstruktion von $\mathbb{Z}$:

Konstruktion von $\mathbb{Q}$:

Proposition: Es gilt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \omega$.

Angeordnete Körper:

Definition: Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Totalordnung $\leqslant$, so dass ausserdem für alle $x, y, z \in K$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} x \leqslant y & \Longrightarrow & x + z \leqslant y + z \\ x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 & \Longrightarrow & x \cdot y \geqslant 0 \end{array}$$

Definition: Für zwei rationale Zahlen a und b setzen wir $a \leqslant b$, wenn ganze Zahlen $m \geqslant 0$ und $n > 0$ existieren mit $b - a = \frac{m}{n}$.

Proposition: Die rationalen Zahlen zusammen mit $\leqslant$ bilden einen angeordneten Körper.

Betrachte einen angeordneten Körper $(K, \leqslant)$.

Proposition: Für alle $x, y, z \in K$ gilt:

(a) $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$

(b) $x < y \iff x + z < y + z$

(c) $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0$

(d) $x > 0 \iff -x < 0$

(e) $1 > 0$

(f) $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$

(g) Ist $z > 0$, so gilt $x \leqslant y \iff xz \leqslant yz$.

(h) Ist $z > 0$, so gilt $x < y \iff xz < yz$.

Proposition: Es existiert eine eindeutige injektive Abbildung $i\colon \mathbb{Q} \hookrightarrow K$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \\ i(1) &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i(a+b) &= i(a) + i(b) \\ i(a \cdot b) &= i(a) \cdot i(b) \end{aligned} \qquad a \leqslant b \iff i(a) \leqslant i(b)$$

Konvention: Wir identifizieren $\mathbb{Q}$ mit seinem Bild via i.

Definition: Ein *angeordneter Körper* heisst *vollständig*, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke besitzt.

Proposition-Definition: Ist K vollständig, so gilt:

(a) Die kleinste obere Schranke einer nach oben beschränkten nichtleeren Teilmenge X ist eindeutig bestimmt und heisst das *Supremum von* X und wird bezeichnet mit $\sup(X)$.

(b) Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge X besitzt eine eindeutige grösste untere Schranke, genannt das *Infimum von* X und bezeichnet mit $\inf(X)$.

(c) Es gelten die üblichen Rechenregeln zwischen $+$ und $\cdot$ und $\leqslant$ und sup und inf.

Proposition: Ist K vollständig, so gilt:

(a) Für alle $x \in K$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(b) Für alle $x \in K$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und $\frac{1}{n} < x$.

(c) Für alle $x, y \in K$ mit $x < y$ existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$.

Proposition: Für jedes $x \in K$ setze $A_x := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$. Ist K vollständig, so gilt für alle $x, y \in K$:

(a) $x = \sup(A_x)$

(b) $A_{x+y} = \{a + b \mid a \in A_x,\ b \in A_y\}$

(c) $A_{-x} = \{a - b \mid a \in \mathbb{Q}^{<0},\ b \in \mathbb{Q} \smallsetminus A_x\}$

(d) $A_{x \cdot y} = \{a \cdot b \mid a \in A_x,\ b \in A_y,\ a, b \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0}$ im Fall $x, y \geqslant 0$

(e) $x \leqslant y \iff A_x \subseteq A_y$

Satz: Zwischen je zwei vollständigen angeordneten Körpern existiert ein eindeutiger Isomorphismus.

Satz: Es existiert ein vollständiger angeordneter Körper.

Definition: Jeden solchen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$ und nennen seine Elemente *reelle Zahlen*.

Konstruktion 1 durch Cauchyfolgen:

Definition: (a) Eine Folge $\underline{x} = (x_n)$ in $\mathbb{Q}$ heisst *Cauchyfolge* wenn gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}\ \exists n_0\ \forall m, n \geqslant n_0 \colon |x_m - x_n| < \varepsilon$$

(b) Zwei Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{Q}$ heissen *äquivalent* wenn gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 \colon |x_n - y_n| < \varepsilon$$

Satz: (a) Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (x_n) mit $[(x_n)]$.

(b) Für je zwei Cauchyfolgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{Q}$ hängen die Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned} [(x_n)] + [(y_n)] &:= [(x_n + y_n)], \\ [(x_n)] \cdot [(y_n)] &:= [(x_n y_n)], \\ [(x_n)] \leqslant [(y_n)] &:\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 \colon x_n \leqslant y_n + \varepsilon \end{aligned}$$

nur von den Äquivalenzklassen $[(x_n)]$ und $[(y_n)]$ ab.

(c) Die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ zusammen mit $+$ und $\cdot$ und $\leqslant$ sowie dem Nullelement $0 := [(0)]$ und dem Einselement $1 := [(1)]$ bildet einen vollständigen angeordneten Körper.

Konstruktion 2 durch Dedekind-Schnitte:

Definition: Ein *Dedekind-Schnitt* ist ein nichtleeres echtes Anfangssegment $A \subseteq \mathbb{Q}$ bezüglich $\leqslant$, das kein maximales Element besitzt.

Proposition: Jedes $r \in \mathbb{Q}$ und je zwei Dedekind-Schnitte A und B induzieren Dedekind-Schnitte

$$\begin{aligned}
i(r) &:= \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\} \\
A + B &:= \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\} \\
-A &:= \{a - b \mid a \in \mathbb{Q}^{<0},\ b \in \mathbb{Q} \smallsetminus B\} \\
A \cdot B &:= \begin{cases} \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B,\ a, b \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0} & \text{falls } 0 \in A \text{ und } 0 \in B, \\ -(A \cdot (-B)) & \text{falls } 0 \in A \text{ und } 0 \notin B, \\ -((-A) \cdot B) & \text{falls } 0 \notin A \text{ und } 0 \in B, \\ (-A) \cdot (-B) & \text{falls } 0 \notin A \text{ und } 0 \notin B, \end{cases}
\end{aligned}$$

sowie die Relation

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B.$$

Satz: (a) Die Menge $\mathbb{D}$ aller Dedekind-Schnitte mit den Operationen $+$ und $\cdot$, den Elementen $0 := i(0)$ und $1 := i(1)$ sowie der Relation $\leqslant$ bildet einen vollständigen angeordneten Körper.

(b) Die Abbildung $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{D}$ ist injektiv und verträglich mit $+$ und $\cdot$ und $\leqslant$.

Konvention: Wir identifizieren $\mathbb{Q}$ stillschweigend mit seinem Bild via der Abbildung i.

Die Bezeichnung der Kontinuumshypothese kommt von:

Satz: Es gilt $|\mathbb{R}| = 2^\omega$.